

Title	グラフによる2次体の類群の2巾階数評価(離散数理モデルにおける最適組合せ構造)
Author(s)	河野, 美文; 北村, 三郎; 中原, 徹
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 820: 1-15
Issue Date	1993-02
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/83181">http://hdl.handle.net/2433/83181</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## グラフによる 2 次体の類群の 2 巾階数評価

河野美文\*) 北村三郎\*\*) 中原 徹\*\*\*)

\*)(Kohno, Yosifumi)    \*\*)(Kitamura, Saburo)    \*\*\*)(Nakahara, Toru)

\*)佐賀大学工学系研究科    \*\*)東和大学工学部    \*\*\*)佐賀大学理工学部

### § 1 Introduction

2 次体の Ideal 類群の構造については、特にその 2-part について、Gauss による種の理論、及び Rédei-Reichardt の理論がよく知られている。この報告書では Rédei-Reichardt の定理のグラフ版（これは、Lagarias[L] による）を紹介し、特に Ideal 類群の 4-rank についてのグラフ上の Zeta 関数を用いた判定を与える。又、大島の修論 [O] の結果を踏まえて、いくつかの簡単なグラフについて、その 4-rank の計算例を与える。更に今後の希望的見通しを Morton の論文 [M2] の紹介と共に述べる。

### § 2 Results

$G(D)$  を 2 次体  $Q(\sqrt{D})$  に付随するグラフとし、 $\kappa(X)$  をグラフ  $X$  のコンプレキシティ [§ 6 参照] とすると、以下のことが成り立つ。

**Fact 1** 完全グラフ  $K(n)$  (valency  $n-1$  の正則グラフの一つ) に対し

$$G(D) = K(q+2) \quad (q \geq 1)$$

となる判別式  $D$  をとると、

$$\kappa(K(q+2)) = (q+2)^q$$

が成り立ち  $Q(\sqrt{D})$  に於いて

$$\begin{cases} q \equiv 0 \pmod{2} \implies e_2 \geq 1 \\ q \equiv 1 \pmod{2} \implies e_2 = 0. \end{cases}$$

ただし、種の理論により  $e_1 = q + 1$  である。

**Remark 1** この事実は Oshima[O] の結果によってもきっちり示されている。

**Fact 2** 完全 2 部グラフ  $K(k_1, k_2)$  (*valency*  $(k_1, k_2)$  の半正則グラフの一つ) に対し

$$G(D) = K(q_1 + 1, q_2 + 1) \quad (q_1, q_2 \geq 1)$$

となる判別式  $D$  をとると、

$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = (q_1 + 1)^{q_2} (q_2 + 1)^{q_1}$$

が成り立ち

$$\begin{cases} q_1 \equiv 0 \pmod{2} \text{ 及び } q_2 \equiv 0 \pmod{2} \implies e_2 = 0 \\ q_1 \equiv 1 \pmod{2} \text{ 又は } q_2 \equiv 1 \pmod{2} \implies e_2 \geq 1. \end{cases}$$

ただし、種の理論により  $e_1 = q_1 + q_2 + 1$  である。

**Fact 3** 連結正則グラフ  $X$  に対し  $G(D) = X$  となる判別式  $D$  をとると

$$\kappa(X) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j + q)$$

が成り立つ。ここに  $\lambda_j$  はグラフ  $X$  の固有値、 $n = \#V$ , *valency* は  $q + 1$ , 特に  $X$  が 2 部グラフであるときは、 $\lambda_{n-1} = -(q + 1)$  となり

$$\kappa(X) = \frac{2(q + 1)}{n} \prod_{j=1}^{n-2} (1 + q - \lambda_j)$$

が成り立つ。よって  $Q(\sqrt{D})$  に於いて

$$\begin{cases} \kappa(X) \equiv 0 \pmod{2} \iff e_2 \geq 1 \\ \kappa(X) \equiv 1 \pmod{2} \iff e_2 = 0 (X : \text{連結正則}). \end{cases}$$

$$\frac{qn}{2} \equiv 1 \pmod{2} \implies e_2 \geq 1. (X: \text{連結正則 2 部}).$$

ただし種の理論により  $e_1 = n - 1$ .

**Fact 4** 連結半正則 2 部グラフ  $X$ , *valency* :  $(q_1 + 1, q_2 + 1)$  に対し  $G(D) = X$  となる判別式  $D$  をとると

$$\kappa(X) = \frac{(1 + q_2)^{n_2 - n_1 + 1}}{n_1} \prod_{j=1}^{n_1 - 1} \{(1 + q_1)(1 + q_2) - \lambda_j^2\}$$

が成り立つ. ここで,  $\lambda_j$  はグラフ  $X$  の固有値,  $n_i = \#V_i$  ( $i = 1, 2$ ),  
よって  $Q(\sqrt{D})$  に於いて

$$\begin{cases} \kappa(X) \equiv 0 \pmod{2} \iff e_2 \geq 1 \\ \kappa(X) \equiv 1 \pmod{2} \iff e_2 = 0. \end{cases}$$

ただし種の理論により  $e_1 = n_1 + n_2 - 1$ .

### § 3 Morton の 結果

有限 Abel 群  $H$  の 2-Sylow subgroup  $H_2$  について、Morton の論文 “*On Rédei's theory of the Pell equation*” [M1] に基づいて述べる。

#### Proposition 1

$$M = (\chi_j(\mathcal{A}_i)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq e_1).$$

ここで、

$$\begin{cases} m \geq e_1, \\ \chi_j : H \text{ の 2 次指標 のなす群 } X \text{ の基底 } (j = 1, \dots, e_1), \\ e_1 : H_2 \text{ の直積因子の個数}, \\ \mathcal{A}_i : H_2 \text{ の元 } (i = 1, \dots, m). \end{cases}$$

とする。このとき

$$M_1 = \left( \begin{array}{c|c} D_1 & + \\ \hline + & + \end{array} \right)$$

とできる。ここで  $D_1$  は  $r_1 \times r_1$  正方行列（無いときもある）で、対角成分は  $-1$ ，その他の成分が  $+1$  とする。

**Definition 1**  $M_1$  は “*reduced*” と呼ばれる。

**Definition 2** 行列  $M$  の *derived sequence*  $M_n$  を次のように決める；

- (1)  $M_1$  は  $M$  を *reduced* したもの
- (2) それぞれの  $M_{n+1}$  は  $M_n$  から *derived* された行列。

**Definition 3** 行列  $D_n$  を  $m \times e_1$  行列  $M_n$  の正方部分行列として次のように定義する；

$$M_n = \left( \begin{array}{c|c} D_n & + \\ \hline + & + \end{array} \right)$$

$D_n$  の次数を  $r_n$  とする。

これから考える行列

$$M = (\chi_j(A_i)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq e_1)$$

として 特に

$$\{A_1, \dots, A_m\}$$

が、 $A_1 (\subset H)$  が位数 2 の元全体、の生成元の集合となるときを扱う。

**Theorem 1** (Morton [M1]) 行列  $M$  の *derived matrices*  $\{M_n\}$  に対して、数  $e_{n+1}$  が、次のようにして与えられる。

$$e_{n+1} = e_1 - r_n \quad (n \geq 1).$$

ただし、 $e_n$  は  $H_2$  の直積因子の中で、その位数が  $2^n$  で割れるものの個数、 $r_n$  は、Definition 3 で定義された行列  $D_n$  の次数を表す。特に、 $H_2$  の直積因子の最大位数を  $2^v$  とすると（そのとき  $e_{v+1} = e_{v+2} = \dots = 0$ ）。

$D_v$  は、sequence  $\{D_n\}$  の中で、 $e_1$  列をもつ最初の行列となる。

さらに、 $D_v$  の行を生成する要素は、 $H_2$  の基底となる。

#### § 4 Rédei-Reichardt の理論

グラフとのつながりを述べる前に、Rédei らによってなされた 2 次体の Ideal 類群の 2-part についての仕事をまとめる。Rédei は、一連の論文で、2 次体の Ideal 類群の 2-part の最初の 3 つの rank について、理論的に記述した。Reichardt による 2 次体  $Q(\sqrt{D})$  の狭義 Ideal 類群  $C$  の  $2^n$ -rank ( $e_n$  とかく) の特徴づけから出発して、Rédei は、 $D$  の因子分解と 2 進乗法的記号

$\{a_1, a_2, a_3\}$  を用いて、 $e_2, e_3$  を特徴づけた。更に、Rédei は、この記号を用いて、任意に与えられた  $e_1, e_2, e_3$  に対して、無限個の実 2 次体が存在することを、示した。Morton は、1982 年の論文 [M2] で、Rédei の理論を虚 2 次体の場合について拡張している。

**Definition 4**  $D$ -分解  $\{D_1, D_2\}$

$$D = D_1 \cdot D_2 = D_2 \cdot D_1$$

ここで、 $D$  は 2 次体  $Q(\sqrt{D})$  の判別式、 $D_i$  は判別式 ( $i=1, 2$ ) 又、1 も判別式と見なし、

$$\{1, D\} : \text{自明な } D\text{-分解}$$

とする。

**Definition 5** 第 2 種  $D$ -分解  $\{D_1, D_2\}$  は、次の条件をみたすものとする；

$$\begin{cases} \left(\frac{D_1}{p_i}\right) = 1, & \forall p_i | D_2 \\ \left(\frac{D_2}{p_i}\right) = 1, & \forall p_i | D_1. \end{cases}$$

ここで  $\left(\frac{\cdot}{p_i}\right)$  は、Kronecker 記号を表す。

自明な  $D$ -分解は、第 2 種となる。

**Theorem 2** (Gauss, Rédei-Reichardt) Gauss の種の理論により、

$$\#\{D\text{-分解}\} = 2^{e_1}.$$

Rédei-Reichardt の定理より

$$\sharp\{\text{第 2 種 } D\text{-分解}\} = 2^{e_2}.$$

ここで、 $e_i$  は  $2^i$ -rank を表す.

## § 5 Rédei-Reichardt 理論のグラフ化

2 次体  $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$  の判別式  $D$  に対して随伴グラフ  $G(D)$  が構成される. それは, Rédei-Reichardt の定理の Rédei による初等的証明に基づくものである.

**Definition 6**  $D = p_1^* \cdots p_N^*$ ,  $p_i^*$  は素判別式すなわち,

$$p_j^* = \begin{cases} (-1)^{\frac{p_j-1}{2}} p_j & , \quad (p_j : \text{奇素数}) \\ -4, -8 \text{ 又は } 8, & (p_j = 2) \end{cases}$$

に対し行列  $A_D = (a_{ij})$  を次の条件で定める:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right) = -1 \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

**Proposition 2** 2 次体  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$  の判別式  $D$  に対して,

$G(D)$  が対応  $\iff A_D$ : グラフの頂点随伴行列 i.e.  $A$  は対称行列.

**Proposition 3**  $D$  がちょうど 1 つの素判別式からなるとき,  
 $A_D$  は対称行列  $(1 \times 1)$ .

**Lemma 1** (Lagarias[L], Oshima[O]) 判別式  $D$  が少なくとも 2 つの異なる素判別式を因子としてもつとき, その随伴行列  $A_D$  が対称行列となるのは次の場合に限る.

- (1)  $D = \Pi p, D = -q \Pi p, \quad p \equiv 1, q \equiv 3 \pmod{4}$
- (2)  $D = -4 \Pi p, D = (-4)(-q) \Pi p, \quad p \equiv 1 \pmod{4}, q \equiv 3 \pmod{8}$
- (3)  $D = \pm 8 \Pi p, D = 8(-q) \Pi p, \quad p \equiv 1, q \equiv 3 \pmod{4}$

**Proposition 4** 任意の  $N$  頂点の単純グラフは, ある判別式  $D$  に対してその随伴グラフ  $G(D)$  として得られる.

**Definition 7**  $D$ -分解  $\{D_1, D_2\}$  は,  $G(D)$  の頂点の集合  $V$  の 2 つの互いに素な集合  $\{V_1, V_2\}$  への分割を決定する. ここで 頂点  $i \in V_j$  となるのは,

$$p_i^* \mid D_j \quad (j = 1, 2)$$

となるとき, 又そのときのみ成り立つ.

**Proposition 5** 頂点の分割  $\{V_1, V_2\}$  は,  $V_1$  と  $V_2$  とを結ぶ辺のみからなる  $G(D)$  の部分グラフの全ての頂点の次数が偶数であるとき, 第 2 種  $D$ -分割に対応している.

(証) 第 2 種  $D$ -分割の意味から

$$\left(\frac{D_1}{p}\right) = 1, \forall p \mid D_2, \quad \left(\frac{D_2}{p}\right) = 1, \forall p \mid D_1.$$

また

$$a_{ij} = 1 \iff \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right) = -1.$$

**Definition 8**  $G(D)$  の部分グラフで全ての辺が,  $V_1$  と  $V_2$  との各点を結ぶものであるとき, 全ての頂点の次数が偶数 (0 を含む) ならば,  $\{V_1, V_2\}$  を *Eulerian vertex decomposition* という.

**Theorem 3** (Rédei - Reichardt criterion)  $D$  を随伴グラフ  $G(D)$  をもつ判別式とするととき  $G(D)$  の *Euler vertex decomposition* の数は  $2^{e_2}$  である. ここで  $e_2$  は  $Q(\sqrt{D})$  の 4-rank を表す. したがって

$$e_2 \geq 1 \iff G(D) \text{ の Euler vertex decomposition の数が偶数である.}$$

**Theorem 4** (Pumplün [P]) 判別式  $D$  に対して

$$D = p_1^* \cdots p_N^*, \quad p_i^* (> 0) : \text{素判別式} \quad (i = 1, \dots, N)$$



となるとき,  $h^*(D)$  を 2 次体  $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$  の狭義類数とするならば

$$h^*(D) \equiv \sum_T \sum_{(i,j) \in T} \left(1 - \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right)\right) \pmod{2^N}.$$

ここで,  $T$  は  $N$  頂点の完全グラフの全ての spanning trees をわたるものとする.

**Theorem 5** (Pumplün criterion) 判別式  $D$  に対して

$$D = p_1^* \cdots p_N^*, \quad p_i^* (> 0): \text{素判別式} \quad (i = 1, \dots, N)$$

とせよ. このとき 2 次体  $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$  の狭義類数  $h^*(D)$  は

$$h^*(D) \equiv 2^{N-1} |ST| \pmod{2^N}$$

を満たす. ここで,  $|ST|$  は  $G(D)$  の spanning trees の数を表す. したがって

$$e_2 \geq 1 \iff G(D) \text{ の spanning trees の数が偶数である.}$$

更に, Lagarias は, 上の 2 つの criterion の同値性を与える次の定理を純グラフ的に証明した.

**Theorem 6** (Lagarias [L]) 任意の単純グラフ  $G$  に対して

$$|EVD| \equiv |ST| \pmod{2}.$$

ここで,  $|EVD|$  は  $G$  の Eulerian vertex decomposition の数を表し,  $|ST|$  は  $G$  の spanning trees の数を表す.

**Proposition 6** (Oshima [O])  $K_n$  を完全グラフ,  $V(K_n)$  を  $K_n$  の頂点集合とすると

$$\#V(K_n) = n. \quad (n \geq 2)$$

$\widetilde{K}_n$  を  $K_n$  より 1 本の edge を取り除いたグラフ ( $n \geq 4$ ) とすると

$$\begin{aligned} 1) \quad |EVD|_{K_n} &= \begin{cases} 2^0, & n: \text{odd} \\ 2^{n-2}, & n: \text{even}(n \geq 2) \end{cases} \\ 2) \quad |EVD|_{\widetilde{K}_n} &= \begin{cases} 2^0, & n: \text{odd} \\ 2^{n-3}, & n: \text{even}(n \geq 4). \end{cases} \end{aligned}$$

## § 6 グラフ上の Zeta 関数

**Theorem 7** (Ihara [I])  $X$  を *valency* は  $q+1$  の連結正則多重辺グラフとし,  $A$  をその随伴行列とする. そのとき

$$Z_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det[I_n - Au + qu^2].$$

ここで  $r = (q-1)n/2$  はグラフ上の  $p_0$  を始点とする基本群  $\Gamma = \pi_1(X, p_0)$  の rank 及び  $n = \sharp(VX)$  を表す.

**Definition 9** (Hashimoto [H])  $X$  を有限連結多重グラフ,  $\Gamma = \pi_1(X, p_0)$  を  $X$  の基本群及び  $EX = \{e_1, \dots, e_m\}$  を  $X$  の非有向辺の集合とすると,  $EX$  の *labelling* によって,

$$e_j \longrightarrow u_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

と対応する独立変数  $u_j$  をとり,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$

とかく. このとき,  $\Gamma$  の共役類  $\mathbf{P} = \{\gamma\}_\Gamma$  に対して

$$\mathbf{u}^{\mathbf{P}} = \mathbf{u}^{C_\gamma} := \prod_{k=1}^d u_{i_k}.$$

ここで,  $C_\gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_d})$  ( $y_{i_k} \in e_{i_k}$  ( $1 \leq k \leq d$ )) は,  $\mathbf{P}$  に対応する簡約閉道とする. 又

$$\deg \mathbf{P} := d = \deg \mathbf{u}^{\mathbf{P}} = |C_\gamma| \quad (= \text{簡約道 } C_\gamma \text{ の長さ})$$

と定義する. 更に,  $\langle C \rangle$  をグラフ  $X$  の長さ  $d$  の簡約閉道の類  $[C]$  に対応する  $\Gamma$  の共役類の元とし

$$\rho: \Gamma \longrightarrow U(n) \text{ を } \Gamma \text{ の } n \text{ 次元 unitary 表現}$$

とするとき  $(\rho, \mathbf{u})$  に付随するグラフ  $X$  の Zeta 関数を次の同値な (形式的) 無限積

$$\begin{aligned} Z_X(\mathbf{u}; \rho) &:= \prod_{\mathbf{P}=\{\gamma\}_\Gamma: \text{primitive}} \det\{I_n - \rho(\gamma)\mathbf{u}^{\mathbf{P}}\}^{-1} \\ &= \prod_{[C]: \text{primitive}} \det\{I_n - \rho(\langle C \rangle)\mathbf{u}^C\}^{-1} \end{aligned}$$

によって定義する．ここで  $\mathbf{P} = \{\gamma\}_\Gamma$  (resp.  $[C]$ ) は  $\Gamma$  の原始的共役類 (resp. *cycle*) の集合をわたる．特に  $\mathbf{u} = (u, \dots, u)$ ,  $\rho = 1$  のとき

$$Z_X(u) := Z_X(\mathbf{u} : 1)$$

とかく．

この定義は,  $PSL(Q_p)$  の離散部分群に付随して定義された伊原 Zeta 関数のグラフ版となっている．また このことは Serre によって指摘され ([S]), 1985 年砂田により名古屋大学に於ける講義の中で具体化された．

今回, 引用した定義は, それらを踏まえ更に一般のグラフに対して, 橋本により定義されたものである．Theorem 7 は, 橋本のグラフ研究の出発点ともなった基本的な結果である．

**Theorem 8** ( Hashimoto [H] )  $X$  を *valency*  $(q_1+1, q_2+1)$  ( $q_1 \geq q_2$ ) の連結半正則 2 部多重グラフ  $\sharp(V_i) = n_i$  ( $i = 1, 2$ ) 及び  $A^{[i]}$  を付随多重グラフ  $X^{[i]}$  の随伴行列とするとき

$$\begin{aligned} Z_{X,b}(u)^{-1} &= (1-u)^{r-1} (1+q_2u)^{n_2-n_1} \det[I_{n_1} - (A^{[1]} - q_2 + 1)u + q_1q_2u^2] \\ &= (1-u)^{r-1} (1+q_1u)^{n_1-n_2} \det[I_{n_2} - (A^{[2]} - q_1 + 1)u + q_1q_2u^2]. \end{aligned}$$

ここで,  $Z_{X,b}(u) := Z_X(u^{1/2})$  と定め,

$$\begin{aligned} r &= n_1q_1 - n_2 + 1 \\ &= n_2q_2 - n_1 + 1 \\ &= \text{the rank of } \Gamma = \pi_1(X, p_0) \end{aligned}$$

である．特に

$$\text{Spec}(X) = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_{n_1}, 0, \dots, 0\} \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_1} \geq 0.)$$

とすると

$$\det[I_{n_1} - (A^{[1]} - q_2 + 1)u + q_1q_2u^2] = \prod_{j=1}^{n_1} \{1 - (\lambda_j^2 - q_1 - q_2)u + q_1q_2u^2\}.$$

橋本はこれらを用いて Lagarias が  $|ST|$  と表現したグラフの spanning trees

の個数を

$$\kappa(X) : X \text{ のコンプレクシティ}$$

と定め、以下の定理で Zeta 関数の  $u = 1$  に於ける特殊値を用いて求めている。

**Theorem 9** ( Hashimoto [H]) (1)  $X$  を *valency* は  $q + 1$  ( $q > 1$ ) の連結正則多重グラフ,  $\sharp VX = n$  及び  $r = \dim_{\mathbf{C}} H_1(X, \mathbf{C})$  とするとき

$$\kappa(X) = \frac{-1}{n(q-1)2^{r-1}} \frac{1}{(1-u)^r Z_X(u)} \Big|_{u=1}.$$

(2)  $X$  を *valency* は  $(q_1 + 1, q_2 + 1)$  ( $q_1 q_2 > 1$ ) の連結半正則 2 部多重グラフ, 及び  $\sharp(V_i) = n_i$  とするとき

$$\kappa(X) = \frac{1+q_2}{n_1} \frac{1}{1-q_1 q_2} \frac{1}{(1-u)^r Z_{X,b}(u)} \Big|_{u=1}.$$

## § 7 Example

(1)  $G(D) = K(k_1, k_2)$  : 完全 2 部グラフ,  $q_1 = 2, q_2 = 2$  の場合

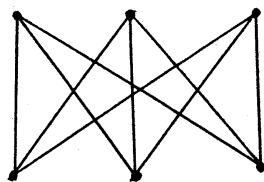
$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = (1 + q_1)^{q_2} (1 + q_2)^{q_1}$$

より

$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = 3^2 3^2 = 3^4 \equiv 1 \pmod{2}.$$

したがって,

$$K(2 + 1, 2 + 1) = K(3, 3) \quad G(D) :$$



に対応する 2 次体  $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$  の

$$4 - \text{rank} = e_2 = 0$$

と解る。種の理論より,

$$2 - \text{rank} = e_1 = (q_1 + 1) + (q_2 + 1) - 1 = q_1 + q_2 + 1 = 5$$

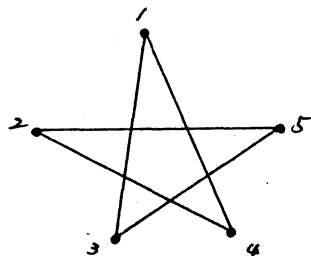
と与えられる。即ち、 $2^5 | h^*(D)$ ，故に

$$H_2 = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2.$$

(2) 連結正則グラフ  $X = G(D)$ ， $q = 1$  の場合，

$$A_D : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G(D) :$



のとき 固有多項式

$$f_A(x) = |xE - A_D| = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(x-2)(x^2+x-1)$$

となり、 $\lambda_j$  : 固有値 ( $j = 1, \dots, 5$ ) とすると、

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0$$

と解る。  $X$  : 連結正則グラフのとき

$$\kappa(X) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j + q) \quad (\text{ただし, } \lambda_n = q + 1)$$

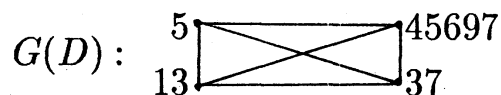
であるから、上の場合、 $n = 5$ ， $q = 1$  となり

$$\kappa(X) = \frac{1}{5} 2^2 \frac{(5 - \sqrt{5})}{2} \frac{(5 + \sqrt{5})}{2} = \frac{1}{5} 2^2 5 = 4 \equiv 0 \pmod{2}.$$

故に

$$4 - \text{rank} = e_2 \geq 1.$$

(3)  $G(D) = K(q+2)$  : 完全グラフ， $q = 2$  の場合 ([O])



のとき  $D = 109901285 = 5 \times 13 \times 37 \times 45697$  として与えられ,  $|EVD| = 2^2$  となることと, 種の理論とにより,

$$e_1 = 3, \quad e_2 = 2$$

と解り,  $h^*(D) = 32$  より,

$$H_2 = C_{2^2} \times C_{2^2} \times C_2$$

となることが解る. このとき,  $q = 2$  より  $\kappa(K(q+2)) = (2+q)^q$  より  $\kappa(G(D)) = (2+2)^2 = 4^2 = 16$  となり

$$\kappa(G(D))|h^*$$

となることも解る.

## § 8 Problem

4-rank の決定について, Lagarias によりグラフ理論的方法が導入され,  $|EVD|$  によって

$$|EVD| = 2^{e_2} \quad (e_2 : 4\text{-rank})$$

と決定された. 又存在, 非存在については  $|ST|$  又は  $\kappa(X)$ : コンプレクシティの偶奇によって判定できた.

我々の今後の目標は, 同様の判定法によって 8-rank の存在, 非存在, 又更には具体的な計算法を与えることである.

Rédei-Reichardt 理論は実の 2 次体について 任意の 2-rank, 4-rank, 8-rank について それらをもつ無限個の実 2 次体とその ideal 類群の構成を与えている. 又 Morton は虚の 2 次体にもそれを拡張している.

§ 2 に現れているのと本質的に同じ有限 Abel 群の理論を用いて 8-rank の決定を有限 Abel 群  $G$  に対して  $G^2$  の 4-rank を求めることに帰着させている. Morton は特定の判別式をもつ 2 次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{-Dq})$  について, 4-rank を *size* とする  $e_2 \times e_2$  matrix  $M$  を構成する *algorithm* を与え

$$e_3 = e_2 - \text{rank } M$$

によって  $e_3 (= 8 - \text{rank})$  が決定されることを示している. そのグラフ化, 又  $8 - \text{rank}$  をもつ場合, もたない場合のグラフの特徴づけはまだなされていない.

### References

- [B] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press (1974).
- [C-O] J. E. Cremona and R. W. K. Odoni, *Some density results for negative Pell equations ; An application of Graph theory*, Journal of London Math. Soc. (2) **39** (1989) 16-28.
- [F] R. Forman, *Determinants of Laplacians on Graphs*, preprint. (1991).
- [H] 橋本 喜一郎 (K. Hashimoto), *Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of  $p$ -adic Groups*, Advanced Studies in Pure Mathematics **15** (1989), 211-280 .
- [I] 伊原 康隆 (Y. Ihara), *On Discrete Subgroups of the Two by Two Projective Linear Group over  $p$ -adic Fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219-235.
- [K] F. H. Koch, *Über den 4-Rank der Klassengruppe quadratischer Zahlkörper* J. Number Theory **19**, 219-227 (1984).
- [L] J. C. Lagarias, *On Determining the 4-Rank of the Ideal Class Group of a Quadratic Field*, J. Number Theory **12** (1980), 191-196 .
- [M1] P. Morton, *On Rédei's theory of the Pell equation*, J. Reine Angew. Math., **307/308** (1979), 373-398.
- [M2] ———, *Density results for the 2-classgroups of imaginary quadratic fields*, J. Reine Angew. Math., **332** (1982), 156-187.
- [M3] ———, *The quadratic number fields with cyclic 2 -classgroups*, Pacific Journal of Mathematics Vol. **108**, No. 1, (1983).
- [N] 中野 伸 (S. Nakano), *On the  $\hat{2}$ -rank of the ideal class groups of pure number fields*, Sonderdruck aus Arch. Math., Vol. **42**, 53-57 (1984).

- [O] 大島 豊 (Y. Oshima), グラフの彩色多項式に関する Unimodal 予想及び 2 次体の類群の Euler グラフを用いた 4-階数評価, 佐賀大学大学院理工学研究科修士論文 (1987), 1-63.
- [P] D. Pumplün, *Über die Klassenzahl und die Grundeinheit des reellquadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **230**(1968), 167-210.
- [R-R] L. Rédei und H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers* J. Reine Angew. Math. **170**(1933), 69-74.
- [R] H. Reichardt, *Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **170**(1933), 75-82.
- [S] J. P. Serre, *Trees* Springer Verlag, Berlin, (1980).
- [Su] 砂田 利一 (T. Sunada), 基本群とラブラシアン, 紀伊国屋書店, (1987)
- [U] 上原 健 (T. Uehara), *On the 4-Rank of the Narrow Ideal Class Group of a Quadratic Field* preprint(1989).